KOMBINATORYKA – ZADANIA Z ROZWIĄZANIAMI

1. Udziel odpowiedzi na poniższe pytania:

a) Ile jest możliwych wyników w rzucie jedną kostką?
W rzucie jedną kostką możemy otrzymać jeden spośród następujących wyników: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Mamy więc <u>6 możliwych wyników.</u>

b) Ile jest możliwych wyników w rzucie dwiema kostkami?
W rzucie dwiema kostkami możemy otrzymać 6 wyników na jednej kostce i 6 wyników na drugiej kostce.
Mamy więc $\underline{6 \cdot 6 = 6^2 = 36 \text{ możliwych wyników.}}$

c) Ile jest możliwych wyników w rzucie trzema kostkami?
W rzucie trzema kostkami możemy otrzymać 6 wyników na jednej kostce, 6 wyników na drugiej kostce i 6 wyników na trzeciej kostce.

d) Mamy więc $\underline{6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3 = 216 \text{ możliwych wyników.}}$

e) Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych?
Mamy do dyspozycji następujące cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Łącznie 10 cyfr.
Każda liczba trzycyfrowa ma postać: S D J; gdzie S oznacza cyfrę setek, D cyfrę dziesiątek, a J cyfrę jedności.
Na pozycji setek możemy ustawić jedną spośród 9 cyfr (bez 0); mamy więc 9 możliwości.
Na pozycji dziesiątek jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Na pozycji jedności też jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Mamy więc $\underline{9 \cdot 10 \cdot 10 = 900 \text{ liczb naturalnych trzycyfrowych.}}$

f) Ile jest liczb czterocyfrowych?
Mamy do dyspozycji następujące cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Łącznie 10 cyfr.
Każda liczba czterocyfrowa ma postać: T S D J; gdzie T oznacza cyfrę tysięcy, S cyfrę setek, D cyfrę dziesiątek, a J cyfrę jedności.
Na pozycji tysięcy możemy ustawić jedną spośród 9 cyfr (bez 0); mamy więc 9 możliwości.
Na pozycji setek jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Na pozycji dziesiątek jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Na pozycji jedności też jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Mamy więc $\underline{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000 \text{ liczb naturalnych czterocyfrowych.}}$

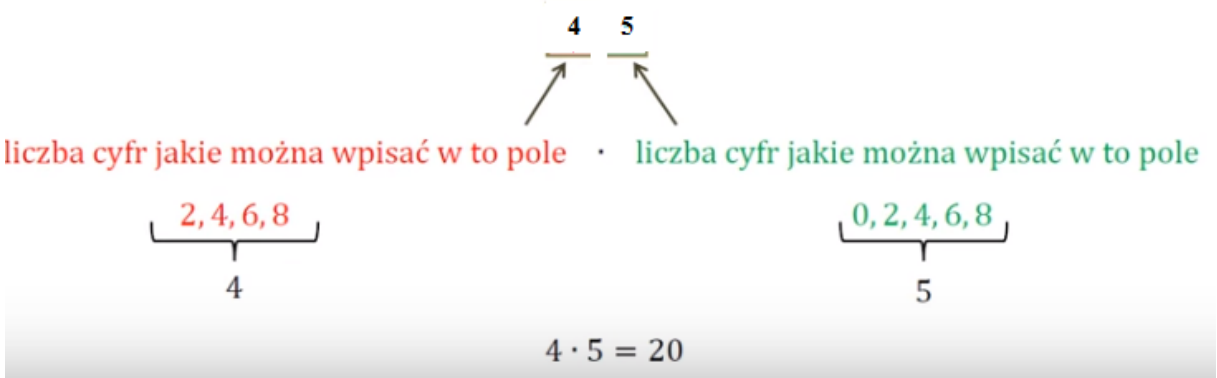
g) Ile jest liczb czterocyfrowych parzystych?
Mamy do dyspozycji następujące cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Łącznie 10 cyfr.
Każda liczba czterocyfrowa ma postać: T S D J; gdzie T oznacza cyfrę tysięcy, S cyfrę setek, D cyfrę dziesiątek, a J cyfrę jedności.
Uwaga! Aby liczba była parzysta na pozycji jedności (J) musi mieć cyfrę parzystą czyli: 0, 2, 4, 6, 8 (mamy więc 5 cyfr parzystych)

Na pozycji tysięcy możemy ustawić jedną spośród 9 cyfr (bez 0); mamy więc 9 możliwości.
Na pozycji setek jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Na pozycji dziesiątek jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Na pozycji jedności jedną spośród 5 cyfr; mamy więc 5 możliwości (patrz uwaga powyżej)
Mamy więc $\underline{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500 \text{ parzystych liczb naturalnych czterocyfrowych.}}$

h) Ile jest liczb czterocyfrowych podzielnych przez 5?
Mamy do dyspozycji następujące cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Łącznie 10 cyfr.
Każda liczba czterocyfrowa ma postać: T S D J; gdzie T oznacza cyfrę tysięcy, S cyfrę setek, D cyfrę dziesiątek, a J cyfrę jedności.
Uwaga! Aby liczba była podzielna przez 5 na pozycji jedności (J) musi mieć jedną z dwóch cyfr: 0 lub 5.
Na pozycji tysięcy możemy ustawić jedną spośród 9 cyfr (bez 0); mamy więc 9 możliwości.
Na pozycji setek jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Na pozycji dziesiątek jedną spośród 10 cyfr; mamy więc 10 możliwości.
Na pozycji jedności jedną spośród 2 cyfr; mamy więc 2 możliwości (patrz uwaga powyżej)
Mamy więc $\underline{9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 360 \text{ liczb naturalnych czterocyfrowych podzielnych przez 5.}}$

2. Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste?

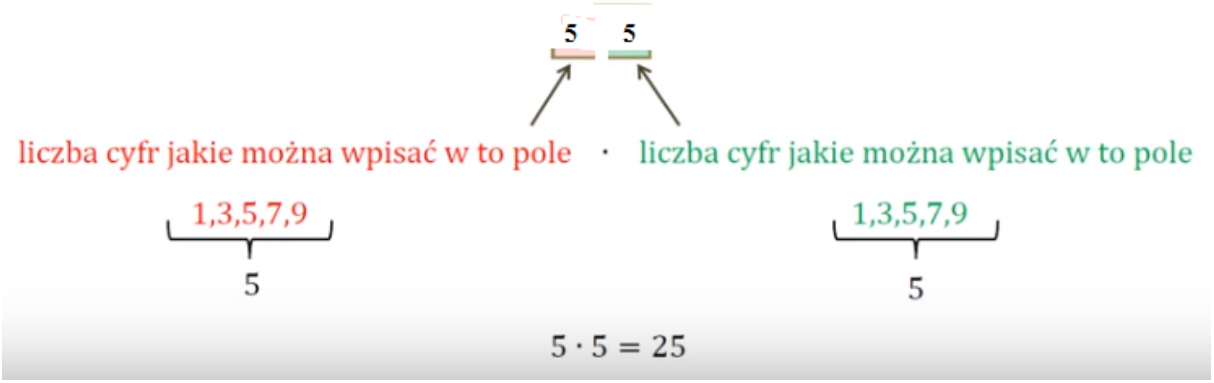
Rozwiązanie:



Odp.: **Takich liczb jest 20.**

3. Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są nieparzyste?

Rozwiązanie:



Odp.: **Takich liczb jest 25.**

4. Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych, w których wszystkie trzy cyfry są parzyste?

Rozwiązanie:

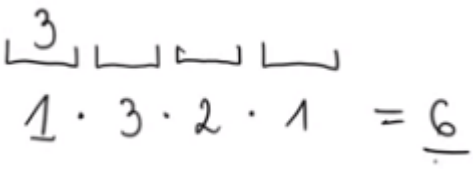
Stosujemy regułę mnożenia: $4 \cdot 5 \cdot 5 = 100$

Odp.: **Takich liczb jest 100.**

5. Wszystkich dodatnich liczb całkowitych czterocyfrowych mniejszych od 4000, zapisanych za pomocą cyfr: 3,5,7,9 tak, że żadna cyfra się nie powtarza, jest:

A. 6 **B.** 24 **C.** 64 **D.** 256

Rozwiązanie:



Komentarz do rysunku:

Cyfrę tysięcy możemy wybrać tylko na 1 sposób; może to być tylko cyfra 3, bo liczba ma być mniejsza od 4000.
Cyfrę setek możemy wybrać na 3 sposoby; spośród cyfr 5, 7, 9.
Cyfrę dziesiątek na 2 sposoby, bo cyfry nie mogą się powtarzać, a cyfrę jedności na 1 sposób, bo tylko jedna cyfra pozostała.

Odp.: **Takich liczb jest 6.**

6. Rzucamy 10 razy monetą. Ile jest wszystkich możliwych wyników tego doświadczenia?

Rozwiązanie:
W każdym rzucie mamy 2 możliwości (orzeł lub reszka), rzutów jest 10, zatem możliwych wyników jest:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^{10} = \mathbf{1024}$$

7. Liczba punktów, których pierwsza współrzędna należy do zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, a druga do zbioru $\{12, 13, 14, 15, 16, 17\}$ jest równa:

A. 11 **B.** 5^6 **C.** 6^5 **D.** 30

Rozwiązanie:

W pierwszym zbiorze jest 5 liczb, a w drugim 6, więc możemy stworzyć

$$5 \cdot 6 = 30.$$

par, w których pierwszy element jest z pierwszego zbioru, a drugi z drugiego (zasada mnożenia).

Odpowiedź: **D.**

8. W restauracji jest 5 rodzajów zup, 6 drugich dań, 7 deserów i 8 rodzajów napojów. Ile jest wszystkich możliwych sposobów zamówienia 2-daniowego obiadu z deserem i napojem?

Rozwiązanie:
Zupę możemy wybrać na 5 sposobów, do każdej zupy na 6 sposobów można wziąć drugie danie, do każdego z tych zestawów na 7 sposobów można zamówić deser i na końcu do każdego z zamówień można dobrać na 8 sposobów napój. Zatem możliwych zamówień jest :

$$5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = \mathbf{1680}$$

9. Pięć osób: Abacki, Babacki, Cabacki, Dabacki i Ebacki kupiło bilety do kina. Na ile sposobów mogą zająć pięć ustalonych miejsc w rzędzie?

Rozwiązanie:
Abacki może usiąść na 5 sposobów, bo wszystkie miejsca są wolne, Babacki ma 4 możliwości, bo 1 miejsce zajął Abacki, Cabackiemu pozostają 3, Dabackiemu 2, w końcu Ebacki musi usiąść na ostatnim wolnym miejscu. Zatem liczba możliwości wynosi:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}\,.$$

10. Na ile sposobów możemy zapisać liczbę trzycyfrową tak, aby pierwsza cyfra była podzielna przez 2, druga przez 4, trzecia przez 8.

Rozwiązanie:
Sprawdzamy po kolei cyfry:
cyfrę setek możemy wybrać spośród cyfr: 2,4,6,8
cyfrę dziesiątek spośród cyfr: 0,4,8
a cyfrę jedności spośród cyfr: 0,8

Zatem możemy ustawić na $4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}$ sposoby.

Uwaga! <u>Zero jest podzielne przez każdą liczbę</u>! np. 0 : 5 = 0, 0 : 8 = 0 itd.

11. Wybieramy liczbę a ze zbioru $A = \{2,3,4,5\}$ oraz liczbę b ze zbioru $B = \{1,4\}$. Ile jest takich par $\{a, b\}$, że iloczyn $a \cdot b$ jest liczbą nieparzystą?

E. 2 **F.** 3 **G.** 5 **H.** 20

Rozwiązanie:

Iloczyn liczb a i b jest liczbą nieparzystą wtedy i tylko wtedy , gdy obie liczby a i b są nieparzyste.
W zbiorze A są dwie liczby nieparzyste, a w zbiorze B tylko jedna. Zatem par (a,b), których iloczyn jest nieparzysty jest 2·1 = 2. (patrz tabela)

	1	4
2	{2,1}	{2,4}
3	{3,1}	{3,4}
4	{4,1}	{4,4}
5	{5,1}	{5,4}

Odpowiedź: **A**

12. Liczb czterocyfrowych większych od 5000, w których zapisie występują jedynie cyfry 1, 3, 5, jest:

A. 8 **B.** 9 **C.** 27 **D.** 36

Rozwiązanie:
Stosujemy regułę mnożenia: pierwszą cyfrę możemy wybrać na 1 sposób, drugą na 3 sposoby, trzecią na 3 sposoby i 4 na trzy sposoby, mamy zatem:

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

Odpowiedź: **C.**

13. W karcie dań jest 5 zup i 4 drugie dania. Na ile sposobów można zamówić obiad składający się z jednej zupy i jednego drugiego dania?

A. 25 **B.** 20 **C.** 16 **D.** 9

Rozwiązanie:

Stosujemy regułę mnożenia: zupę możemy wybrać na 5 sposobów, drugie danie na 4 sposoby; mamy zatem:

$5 \cdot 4 = 20$ sposobów wyboru obiadu.

Odpowiedź: **B**

14. Liczba sposobów na jakie można ustawić w szeregu 3 chłopców i 2 dziewczynki tak, aby dwie osoby tej samej płci nie stały obok siebie jest równa:

A. 5 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 12

Rozwiązanie:
Warunki zadania spełnia taki układ:

C D C D C

Stosujemy regułę mnożenia: pierwsze miejsce mogę obstawić na 3 sposoby, drugie miejsce na 2 sposoby, trzecie na 2 sposoby, czwarte na 1 sposób, a piąte też na 1 sposób; mamy zatem:

$3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 12$ sposobów ustawienia zgodnego z warunkami zadania.

Odpowiedź: **D.**

15. Pan Jakub ma 4 marynarki, 7 par różnych spodni i 10 różnych koszul. Na ile różnych sposobów może się ubrać, jeśli zawsze zakłada marynarkę, spodnie i koszulę.

A. 280 **B.** 21 **C.** 28 **D.** 70

Rozwiązanie:
Stosujemy regułę mnożenia: marynarkę może wybrać na 4 sposoby, spodnie na 7 sposobów, a koszulę na 10 sposobów; mamy zatem:

$4 \cdot 7 \cdot 10 = 280$ sposobów ubrania..

Odpowiedź: **A.**

16. *Cztery dziewczynki i sześciu chłopców siedzą na tym samym pniu zwalonego dębu. Dziewczynki siedzą obok siebie i chłopcy również siedzą obok siebie. Wszystkich możliwych sposobów posadzenia dzieci w ten sposób jest:

A. $4 \cdot 6$ **B.** $2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
C. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ **D.** $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2$

Rozwiązanie:
D – dziewczynka C - chłopiec

Zgodnie z warunkami zadania spełnia dzieci mogą siedzieć:
tak : D D D D C C C C C C
<u>lub</u> tak: C C C C C C D D D D

W pierwszym przypadku mamy: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów ustawienia

W drugim przypadku mamy: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ sposobów ustawienia (tyle co w pierwszym). Zatem prawidłowa odpowiedź: **D.**

17. *Ośmiu znajomych, wśród których jest jedno małżeństwo, kupiło bilety do kina na kolejne miejsca w jednym rzędzie. Wszystkich możliwych sposobów zajęcia miejsc tak, aby małżonkowie siedzieli obok siebie, jest:

A. 40320 **B.** 5040 **C.** 10080 **D.** 720

Rozwiązanie:
Ż – żona M – mąż Z - znajomy

ustawienie	***ilość sposobów***
Ż M Z Z Z Z Z Z	$2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$
Z Ż M Z Z Z Z Z	$6 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$

Z Z Ż M Z Z Z Z	$6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$
Z Z Z Ż M Z Z Z	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$
Z Z Z Z Ż M Z Z	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$
Z Z Z Z Z Ż M Z	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1440$
Z Z Z Z Z Z Ż M	$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 1440$

Wszystkich możliwych sposobów zajęcia miejsc tak, aby małżonkowie siedzieli obok siebie, jest:

$$7 \cdot 1440 = 10080$$

Odpowiedź: **C.**

18. Liczba sposobów, na jakie Ala i Bartek mogą usiąść na dwóch spośród pięciu miejsc w kinie, jest równa

A. 25 **B.** 20 **C.** 15 **D.** 12

Rozwiązanie:
Stosujemy regułę mnożenia: pierwsza może wybierać jedno miejsce spośród 5, druga jedno spośród 4; mamy zatem:

$5 \cdot 4 = 20$ sposobów zajęcia miejsc

Odpowiedź: **B.**

19. Czworo znajomych: Adam (A), Beata (B), Czarek (C) i Dorota (D) mają bilety na miejsca 11, 12, 13 i 14 w VIII rzędzie Sali kinowej. Na ile sposobów mogą oni wszyscy zająć te miejsca tak, żeby Adam siedział obok Beaty i Czarek obok Doroty?

A. 24 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 2

Rozwiązanie:

Zgodnie z warunkami zadania mogą siedzieć:
tak : A B C D
<u>lub</u> tak: C D A B

W pierwszym przypadku mamy: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ sposoby zajęcia miejsc.

W drugim przypadku mamy: $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ sposoby zajęcia miejsc.
Zatem łącznie mamy $4 + 4 = 8$ sposobów zajęcia miejsc w kinie.

Odpowiedź: **B.**

20. W pudełku znajdują się kartki, na których zapisano jednocyfrowe liczby naturalne nieparzyste. Wyjmujemy z pudełka kolejno trzy kartki i układając je jedna obok drugiej tworzymy liczby trzycyfrowe. Liczb takich możemy utworzyć maksymalnie:

A. 120 **B.** 125 **C.** 60 **D.** 15

Rozwiązanie:
W pudełku mamy następujące liczby: 1, 3, 5, 7, 9.

Stosujemy regułę mnożenia: pierwszą cyfrę możemy wybrać na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, a trzecią na 3 sposoby; mamy zatem:

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ sposobów utworzenia liczb.

Odpowiedź: **C.**

21. Liczb trzycyfrowych o jednakowej cyfrze setek i jedności jest:

A. 120 **B.** 90 **C.** 100 **D.** 300

Rozwiązanie:
S – cyfra setek D – cyfra dziesiątek J – cyfra jedności
Mamy zatem zapis naszej liczby S D J
Cyfrę setek możemy zapisać na 9 sposobów (bez zera), cyfrę dziesiątek na 10 sposobów, a cyfrę jedności na 1 sposób (musi być taka sama jak cyfra setek).
Stosujemy regułę mnożenia: $9 \cdot 10 \cdot 1 = 90$ sposobów utworzenia liczb.

Odpowiedź: **B.**

22. W turnieju szachowym, rozgrywanym w systemie każdy z każdym, miało brać udział 8 zawodników. Jeden z nich zrezygnował. Liczba zaplanowanych rozgrywek zmniejszyła się o:

A. 1 **B.** 14 **C.** 7 **D.** 8

Rozwiązanie:

- Wypisujemy pary graczy przed rezygnacją – dla 8 zawodników:

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8)

(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8)

(3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8)

(4,5), (4,6), (4,7), (4,8)

(5,6), (5,7), (5,8)

(6,7), (6,8)

(7,8)

Mamy **28** zaplanowanych rozgrywek.

- Wypisujemy pary graczy po rezygnacji – dla 7 zawodników:

(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7)

(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7)

(3,4), (3,5), (3,6), (3,7)

(4,5), (4,6), (4,7)

(5,6), (5,7)

(6,7)

Mamy **21** rozgrywek.

$$\mathbf{28 - 21 = 7}$$

Odpowiedź: **C**

23. Wszystkich liczb trzycyfrowych parzystych, których cyfra jedności należy do zbioru $A = \{2,4,5,7\}$, cyfra dziesiątek do zbioru $B = \{6,7,8\}$, a cyfra setek do zbioru $C = \{2,4,5,6\}$ jest:

A. 48 **B.** 36 **C.** 24 **D.** 12

Rozwiązanie:
S – cyfra setek D – cyfra dziesiątek J – cyfra jedności
Mamy zatem zapis naszej liczby S D J
Cyfrę setek możemy zapisać na 4 sposoby , cyfrę dziesiątek na 3 sposoby, cyfrę jedności na 4 sposoby.
Stosujemy regułę mnożenia:

$$4 \cdot 3 \cdot 4 = 48 \text{ sposobów utworzenia liczb.}$$

Odpowiedź: **A.**

24. Wszystkich dodatnich liczb całkowitych czterocyfrowych mniejszych od 4000, zapisanych za pomoca cyfr: 3, 5, 7, 9 tak, że żadna cyfra nie powtarza się jest:

A. 6 **B.** 24 **C.** 64 **D.** 256

Rozwiązanie:
T – cyfra tysięcy S – cyfra setek D – cyfra dziesiątek J – cyfra jedności
Mamy zatem zapis naszej liczby T S D J
Cyfrę tysięcy możemy zapisać na 1 sposób (tylko trójka), cyfrę setek możemy zapisać na 3 sposoby , cyfrę dziesiątek na 2 sposoby, cyfrę jedności na 1 sposób.
Stosujemy regułę mnożenia:

$1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sposobów utworzenia liczb.

Odpowiedź: **A.**

25. Ile jest wszystkich liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5?

A. 90 **B.** 100 **C.** 180 **D.** 200

Rozwiązanie:
S – cyfra setek D – cyfra dziesiątek J – cyfra jedności
Mamy zatem zapis naszej liczby S D J
Cyfrę setek możemy zapisać na 9 sposobów (bez zera) , cyfrę dziesiątek na 10 sposobów, cyfrę jedności na 2 sposoby (jeżeli liczba ma się dzielić przez 5, to ostatnią jej cyfrą musi być 0 lub 5).
Stosujemy regułę mnożenia:

$9 \cdot 10 \cdot 2 = 180$ sposobów utworzenia liczb.

II sposób:

Pierwsza naturalna trzycyfrowa liczba podzielna przez 5, to liczba 100.
Ostatnia liczba trzycyfrowa podzielna przez 5, to liczba 995.
Liczby te stanowią ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 100$, $r = 5$ i $a_n = 995$.
Skorzystaj ze wzoru:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$100 + (n-1) \cdot 5 = 995$$
$$100 + 5n - 5 = 995$$
$$5n = 900 /: 5$$
$$n = 180$$

Odpowiedź: **C.**

26. Wybieramy jedną liczbę ze zbioru $\{3,4,5\}$ i jedną ze zbioru $\{2,3\}$. Na ile sposobów można wybrać te liczby tak, aby ich suma była liczbą nieparzystą?

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 6

Rozwiązanie:

Wybrane liczby muszą być różnej parzystości (jedna parzysta, jedna nieparzysta); łatwo wypisać wszystkie możliwości: (3 i 2; 4 i 3, 5 i 2) bo:

$$3 + 2 = 5 \qquad 4 + 3 = 7 \qquad 5 + 2 = 7$$

Odpowiedź: **A.**

27. Na ile sposobów można wybrać dwóch graczy spośród 10 zawodników?

A. 100 **B.** 90 **C.** 45 **D.** 20

Rozwiązanie:
Pierwszego gracza można wybrać na 10 sposobów, drugiego na 9 sposobów; z reguły mnożenia mamy $10 \cdot 9 = 90$ sposobów, ale uwaga wybór (gracz 1, gracz 2) jest taki sam jak wybór (gracz 2, gracz 1), bo kolejność jest nieistotna, więc musimy liczbę otrzymanych sposobów podzielić przez 2. Zatem:
90 : 2 = 45 sposobów

Odpowiedź: **C.**

28. Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych takich, że iloczyn ich cyfr jest równy 4?

A. 2 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Rozwiązanie:
Najpierw wypisz zestawy po dwie cyfry, które pomnożone przez siebie dają 4.
Następnie popatrz na ile sposobów można każdy z tych zestawów ułożyć w liczbę dwucyfrową.
Jeżeli dwie cyfry mają po pomnożeniu dawać 4, to są dwa możliwe zestawy czynników: (1) 2,2 - te cyfry można ułożyć tylko w jedną dwucyfrową liczbę: 22.
(2) 1,4 - te cyfry można ułożyć w 2 liczby dwucyfrowe: 14 i 41.
Czyli mamy 3 liczby spełniające warunki zadania.

Odpowiedź: **B.**

29. Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych takich, że iloczyn ich cyfr jest równy 6?

A. 2 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 8

Rozwiązanie:
Najpierw wypisz zestawy po dwie cyfry, które pomnożone przez siebie dają 6.
Następnie popatrz na ile sposobów można każdy z tych zestawów ułożyć w liczbę dwucyfrową.
Jeżeli dwie cyfry mają po pomnożeniu dawać 6, to są dwa możliwe zestawy:
(1) 1,6
Te cyfry można ułożyć w 2 dwucyfrowe liczby: 16 i 61.
(2) 2,3
Te cyfry także można ułożyć w 2 liczby dwucyfrowe: 23 i 32.
Czyli mamy 4 liczby spełniające warunki zadania.

Odpowiedź: **B.**

30. Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których obie cyfry są parzyste?

A. 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 25

Rozwiązanie:
Liczby parzyste to: 0, 2, 4, 6, 8.
Pierwszą cyfrę (cyfrę dziesiątek) możemy wybrać na 4 sposoby (bez zera), drugą cyfrę (cyfrę jedności) na 5 sposobów.
Reguła mnożenia: $.4 \cdot 5 = 20$
Zatem szukanych liczb jest 20.

Odpowiedź: **B.**

31. Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych o sumie cyfr równej 2?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Rozwiązanie:
Najpierw wypisz zestawy po cztery cyfry, które w sumie dają 2.
Następnie popatrz na ile sposobów można każdy z tych zestawów ułożyć w liczbę czterocyfrową (przypominamy, że np. 0100 to liczba 3-cyfrowa, a nie 4-cyfrowa !)
Jeżeli cztery cyfry mają w sumie dawać 2, to są dwa możliwe zestawy:
(1) 0,0,0,2
Te cyfry można ułożyć tylko w jedną czterocyfrową liczbę: 2000.
(2) 0,0,1,1
Te cyfry można ułożyć w 3 liczby czterocyfrowe: 1001,1010,1100.
Czyli mamy 4 liczby spełniające warunki zadania.

Odpowiedź: **D.**

32. Ile jest wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, w których pierwsza cyfra jest parzysta, a druga nieparzysta?

A. 16 **B.** 20 **C.** 24 **D.** 25

Rozwiązanie:

Ustal, na ile sposobów można zapisać pierwszą cyfrę, a na ile sposobów drugą i obie liczby pomnóż przez siebie.
Pierwsza cyfrę można wybrać na 4 sposoby (2,4,6,8), a drugą na 5 sposobów (1,3,5,7,9), zatem liczbę dwucyfrową o pierwszej cyfrze parzystej a drugiej nieparzystej można utworzyć na $4 \cdot 5 = 20$ sposobów.

Odpowiedź: **B.**

33. Flagę, taką jak pokazano na rysunku, należy zszyć z trzech jednakowej szerokości pasów kolorowej tkaniny. Oba pasy zewnętrzne mają być tego samego koloru, a pas znajdujący się między nimi ma być innego koloru. Liczba różnych takich flag, które można uszyć, mając do dyspozycji tkaniny w 10 kolorach, jest równa

A. 100 **B.** 99 **C.** 90 **D.** 19

Rozwiązanie:
Pomyśl na ile sposobów można wybrać dwa kolory do uszycia jednej flagi.
Kolor zewnętrznych pasów możemy wybrać na 10 sposobów, a kolor pasa na 9 sposobów (bo ma być inny od pasów zewnętrznych).
Reguła mnożenia: $10 \cdot 9 = 90$ możliwości uszycia flag.

Odpowiedź: **C.**

34. Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których zapisie pierwsza cyfra jest parzysta, a pozostałe nieparzyste.

Rozwiązanie:

Policz na ile sposobów można wybrać każdą z 4 cyfr, aby liczba spełniała warunki opisane w zadaniu, a potem zastosuj regułę mnożenia.
Pierwsza cyfra ma być parzysta, zatem możemy ją wybrać ze zbioru {2,4,6,8}, czyli na 4 sposoby.
Cyfry setek, dziesiątek i jedności mają być nieparzyste, zatem wybrane ze zbioru {1,3,5,7,9}, czyli każda z nich na 5 sposobów.

Stosujemy regułę mnożenia: $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$

Odpowiedź: **Liczb spełniających warunki zadania jest 500.**

35. Liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach i o parzystej cyfrze tysięcy, setek i dziesiątek jest:

A. $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$ **B.** $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8$ **C.** $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 8$ **D.** $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 9$

Rozwiązanie:
Pomyśl na ile sposobów można wybrać kolejno cyfrę tysięcy, setek, dziesiątek i jedności
Pamiętaj, że cyfra tysięcy, nie może być zerem i że każda cyfra może być wykorzystana tylko raz.
Na koniec zastosuj regułę mnożenia.
Cyfrę tysięcy możemy wybrać na 4 sposoby, bo spośród wszystkich pięciu cyfr parzystych, nie możemy wybrać zera.
Cyfrę setek możemy wybrać również na 4 sposoby, bo co prawda wykorzystana już została jedna cyfra parzysta, ale teraz możemy wykorzystać cyfrę zero.
Cyfrę setek możemy wybrać tylko na trzy sposoby, bo dwie parzyste cyfry już zostały wykorzystane.
Pozostało 7 cyfr i każdą z nich można wykorzystać jako cyfrę jedności.
Liczb czterocyfrowych o różnych cyfrach i o parzystej cyfrze tysięcy, setek i dziesiątek jest: $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7$.

Odpowiedź: **A.**

36. *Podczas egzaminu student może wybrać 4 pytania spośród 6 możliwych. Na ile sposobów może to zrobić?

Pamiętamy, że jeśli student wybierze już jedno pytanie, ma mniej możliwości niż wcześniej, zatem:

I pytanie: 6 sposobów (jest 6 pytań do wyboru)
II pytanie: 5 sposobów (wybrał jedno, zostało 5)
III pytanie: 4 sposoby (itd)
IV pytanie: 3 sposoby
Z reguły mnożenia: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

Jednakże <u>kolejność</u>, które pytanie wybierze najpierw, które potem itd. nie ma tutaj znaczenia, <u>zatem liczymy jeszcze dostępne ustawienia tych pytań, które wybrał</u>.
Ustawiamy:

I pytanie: 4 sposoby (może wybrać I pytanie jako pierwsze, drugie, trzecie albo czwarte)
II pytanie: 3 sposoby (na II pytanie zostały mu już tylko 3 miejsca)
III pytanie: 2 sposoby (itd)
IV pytanie: 1 sposób
$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$
Musimy w końcu podzielić nasze kombinacje: $\frac{360}{24} = 15$

Odpowiedź**: Student może więc wybrać na 15 sposobów.**

37. *Ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych takich, że w ich zapisie dziesiętnym występuje jedna cyfra nieparzysta i trzy cyfry parzyste.

Rozwiązanie:

Mamy do dyspozycji następujące cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Łącznie 10 cyfr.
Wśród tych cyfr mamy:

5 cyfr parzystych: 0, 2, 4, 6, 8 oraz 5 cyfr nieparzystych: 1, 3, 5, 7, 9.

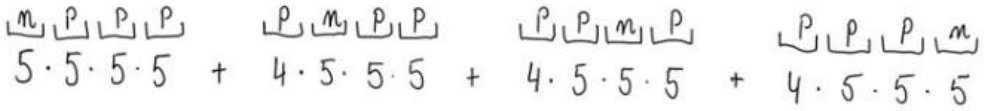
Zgodnie z warunkami zadania mamy zliczyć liczby naturalne czterocyfrowe, które w zapisie mają jedną cyfrę nieparzystą i 3 cyfry parzyste.

Każda liczba czterocyfrowa ma postać: T S D J;
gdzie T oznacza cyfrę tysięcy, S cyfrę setek, D cyfrę dziesiątek, a J cyfrę jedności.

Cyfra nieparzysta (n) może stać na pozycji T lub S lub D lub J.

n p p p lub **p n p p** lub **p p n p** lub **p p p n**

Dla każdego powyższego ustawienia liczymy ilość możliwości zapisu liczby, a następnie je sumujemy; stosujemy regułę mnożenia i dodawania. (patrz rysunek).



$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot +4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 + 500 + 500 + 500 = 2125$

Odpowiedź**: Takich liczb jest 2125.**

38. Ile jest wszystkich liczb czterocyfrowych, większych od 3000, utworzonych wyłącznie z cyfr 1,2,3, przy założeniu, że cyfry mogą się powtarzać, ale nie wszystkie z tych cyfr muszą być wykorzystane?

A. 3 **B.** 6 **C.** 9 **D.** 27

Rozwiązanie:

Sposób I

Skoro liczby mają być większe od 3000, to pierwsza cyfra każdej z takich liczb musi być równa 3. Każdą z pozostałych 3 cyfr możemy wybrać dowolnie spośród cyfr: 1, 2, 3. Jest więc

$$1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

takich liczb.

Sposób II

Wypisujemy wszystkie liczby spełniające warunki zadania.

3111, 3112, 3121, 3211, 3113, 3131, 3311, 3122, 3212, 3221,
3133, 3313, 3331, 3123, 3132, 3213, 3312, 3231, 3321, 3222,
3223, 3232, 3322, 3233, 3323, 3332, 3333.

Odpowiedź: **D.**

39. *Ile jest liczb naturalnych trzycyfrowych, w których cyfra dziesiątek jest o 2 większa od cyfry jedności?

Mamy do dyspozycji następujące cyfry: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Łącznie 10 cyfr.
Każda liczba trzycyfrowa ma postać: S D J;
Pomyśl na ile sposobów można wybrać kolejno cyfrę setek, dziesiątek i jedności
Pamiętaj, że cyfra setek, nie może być zerem.
Na koniec zastosuj regułę mnożenia.
Cyfrę setek możemy wybrać na 9 sposobów, bo spośród wszystkich cyfr nie możemy wybrać zera.
Cyfrę dziesiątek jest zależna od cyfry jedności, musi być o 2 większa!
Cyfrę jedności możemy wybrać na 8 sposobów spośród cyfr 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, bo gdyby na ostatniej pozycji stała np. 8 to na pozycji dziesiątek wyszłaby nam 10 (8+2=10).
Zatem cyfrę setek wybieramy na 9 sposobów, cyfrę dziesiątek na 1 sposób, a cyfrę jedności na 8 sposobów. (gdy na pozycję jedności wybierzemy np. cyfrę 4, to na pozycji dziesiątek musi stać 6 – nie mamy innego wyboru).
Stosujemy regułę mnożenia: $9 \cdot 1 \cdot 8 = 72$

Odp.: **Liczb trzycyfrowych spełniających warunki zadania jest 72.**

40. Oblicz, ile jest liczb naturalnych czterocyfrowych, w których cyfra jedności jest o 3 większa od cyfry setek?

Rozwiązanie:

Cyfrę tysięcy utworzonej liczby możemy wybrać na 9 sposobów (nie może być 0), a cyfrę dziesiątek na 10 sposobów. Cyfrę setek musimy wybrać ze

zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (żeby cyfra jedności mogła być o 3 większa), czyli na 7 sposobów. Jeżeli chodzi o cyfrę jedności, to nie mamy już żadnego wyboru, bo jest ona wyznaczona jednoznacznie przez cyfrę setek.
Jest więc (zasada mnożenia): $9 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 1 = 630$
Odpowiedź**: Takich liczb jest 630.**

41. Ile jest liczb naturalnych dwucyfrowych:
a) podzielnych przez 15 lub 20?
b) podzielnych przez 15 i 20?

Rozwiązanie:
Stosujemy metodę wypisywania.
Liczby dwucyfrowe podzielne przez 15 to: 15, 30, 45, 60, 75, 90.
Liczby dwucyfrowe podzielne przez 20 to: 20, 40, 60, 80
Ad. a) liczb podzielnych przez 15 lub 20 jest 9: 15, 20, 30, 40, 45, 60, 75, 80, 90.
Ad. b) liczba podzielna przez 15 i 20 jest tylko 1: 60.

42. Na ile sposobów można ustawić w kolejce 5 osób ?

Rozwiązanie:
Kolejność tutaj ma znaczenie, stosujemy regułę mnożenia:

Ustawiona I osoba: 5 sposobów
Ustawiona II osoba: 4 sposoby
Ustawiona III osoba: 3 sposoby
Ustawiona IV osoba: 2 sposoby
Ustawiona V osoba: 1 sposób

Z reguły mnożenia: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$ **sposobów**

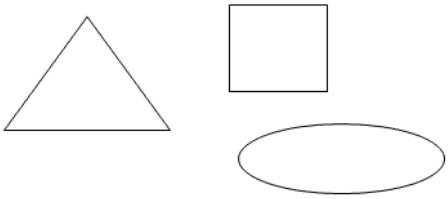
43. Ze wsi A do wsi B prowadzi 5 ścieżek przez las. Na ile sposobów można odbyć spacer A- B- A, tak aby spacer ze wsi B do wsi A odbyć inną ścieżką niż ze wsi A do wsi B?

Rozwiązanie:

Ze wsi A do B możemy wybrać jedną spośród 5 ścieżek, zatem mamy 5 możliwości,
Ze wsi B do A możemy wybrać jedną spośród 4 ścieżek, mamy 4 możliwości (odpada ścieżka, którą szliśmy z A do B).
Stosujemy regułę mnożenia: $5 \cdot 4 = 20$

Odp.: **Taki spacer możemy odbyć na 20 sposobów.**

44. Na rysunku dany jest kwadrat, trójkąt i elipsa. Mamy również do dyspozycji 8 kolorów farb. Na ile różnych sposobów można pomalować wszystkie trzy figury tymi ośmioma kolorami, tak aby każda figura była w innym kolorze?



A. 27 **B.** 336 **C.** 512 **D.** 8^8

Rozwiązanie:
Pierwszą figurę możemy pomalować na 8 sposobów, drugą na 7 sposobów, a trzecią na 6 sposobów.
Stosujemy regułę mnożenia: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Odp.: **B.**

45. Wszystkich liczb naturalnych dwucyfrowych, których obie cyfry są mniejsze od 5 jest

A. 16 **B.** 20 **C.** 25 **D.** 30

Rozwiązanie:

Cyfry mniejsze od 5 to: 0, 1, 2, 3, 4, czyli mamy razem 5 cyfr do dyspozycji.
Nasza liczba ma postać: DJ, gdzie D to cyfra dziesiątek, a J to cyfra jedności.
Pierwszą cyfrę możemy wybrać na 4 sposoby (bez 0), drugą na 5 sposobów.
Stosujemy regułę mnożenia: $4 \cdot 5 = 20$

Odp.: **B.**