

Temat: Tożsamości trygonometryczne.

Z tożsamościami trygonometrycznymi spotkaliście się już w klasie pierwszej. Przypomnimy co to jest tożsamość trygonometryczna i jak się je dowodzi.

Tożsamość trygonometryczna, to równania złożone z funkcji trygonometrycznych, których prawdziwość mamy udowodnić np.:

$$\operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin^2 x = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$$

W tym celu musimy przekształcić jedną lub obie strony równania, korzystając ze wzorów przedstawionych w poprzedniej lekcji. Zazwyczaj zaczynamy od strony bardziej „skomplikowanej” i przez kolejne przekształcenia dochodzimy do strony „prostszej”

Niestety, nie da się na pierwszy rzut oka określić, którą stronę równania najlepiej przekształcić i w jaki sposób - wymaga to dużego wyczucia, które przychodzi z czasem i z liczbą rozwiązanych przykładów. Na początku musimy sobie radzić „metodą prób i błędów”.

Zamieszczam wam kilka przykładów pokazujących w jaki sposób udowadniamy tożsamości.

Przykład 1.

Udowodnij tożsamość trygonometryczną:

$$\frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x} = \operatorname{ctgx} + 2\operatorname{tgx}$$

Rozwiązanie:

Zaczynamy od lewej strony:

$$\begin{aligned} \text{L} = \frac{\cos^2 x + 2\sin^2 x}{\cos x \cdot \sin x} &= \frac{\cancel{\cos}^2 x}{\cancel{\cos} x \cdot \sin x} + \frac{2\sin^2 x}{\cos x \cdot \cancel{\sin} x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{2\sin x}{\cos x} = \operatorname{ctgx} + 2\operatorname{tgx} = \text{P} \end{aligned}$$

(Przekształcemy lewą stronę równania, jest ona bardziej skomplikowana, dlatego próbujemy ją uprościć. W pierwszej kolejności rozbijamy ułamek na dwa prostsze, następnie wykonujemy skracanie). Wykorzystujemy następnie dwa wzory z poprzedniej lekcji tj. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

L=P (lewa strona równa się prawej zatem udowodniliśmy tożsamość)

Przykład 2.

Kolejne przykłady znajdziecie w poniższych filmach dydaktycznych:

<https://www.youtube.com/watch?v=z6ArwvOKtCk>

<https://www.youtube.com/watch?v=fTuu19lqmJU>

<https://www.youtube.com/watch?v=IhichJCLjKY&t=121s>

Teraz proszę was o rozwiązanie poniższych przykładów:

Zadanie.

Przeanalizuj przykłady, a następnie wykonaj zadania.

Przykład.

Przekształć do najprostszej postaci: $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$.

$$(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

Przekształć do najprostszej postaci: $(1 - \sin\alpha)(1 + \sin\alpha)$.

Przekształć do najprostszej postaci: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

Przykład.

Sprawdź tożsamość: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1$.

$$L = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = P$$

c.n.p.

Sprawdź tożsamość: $\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1$.

Sprawdź tożsamość: $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$