Zadanie 1. (0–3)

Dana jest liczba $a = \log_{12} 4 \cdot \log_{12} 36 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} \sqrt{3}$.

Wykaż, że liczba a jest liczbą całkowitą. Zapisz obliczenia.

Zadanie 2. (0–3)

Dana jest funkcja $f\left(x\right) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + 3\frac{8}{9}x$. Prosta k jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $A = \left(1, f\left(1\right)\right)$. Prosta m jest równoległa do prostej k, różna od prostej k i jednocześnie styczna do wykresu funkcji f w punkcie $B = \left(b, f\left(b\right)\right)$.

Wyznacz wartość b. Zapisz obliczenia.

Zadanie 3. (0–4)

Dla pewnych liczb rzeczywistych x ciąg $\left(7 - x,\ x + 8,\ -2x,\ \ldots\right)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Szereg geometryczny wyznaczony przez ten ciąg jest zbieżny.

Wyznacz sumę tego szeregu. Zapisz obliczenia.

Zadanie 4. (0–5)

Dane jest równanie $\left(x - 2\right)\left(x^2 + mx - m + 3\right) = 0$ z niewiadomą x i parametrem m, $m \in \mathbb{R}$.

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy rozwiązania rzeczywiste takie, że kwadrat ich iloczynu jest większy od kwadratu ich sumy.
Zapisz obliczenia.

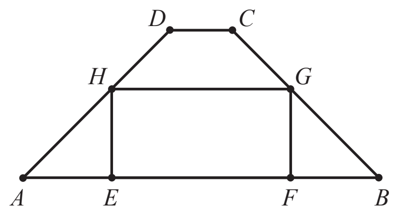
Zadanie 5. (0–3)

Dane są trzy kolejne dodatnie liczby naturalne.

Udowodnij, że jeśli zsumujemy sześcian najmniejszej z tych liczb, kwadrat liczby środkowej oraz największą z danych liczb naturalnych, to otrzymamy liczbę złożoną.

Zadanie 6.

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym $|AB| = 18$, $|BC| = |AD| = 10$ i $|CD| = 2$. W ten trapez wpisano prostokąt $EFGH$ jak na rysunku (bok EF zawiera się w boku AB trapezu, zaś wierzchołki G i H leżą na ramionach trapezu). Niech x oznacza długość boku HE.



Zadanie 6.1 (0–4)

Wykaż, że funkcja f opisująca iloczyn pola prostokąta $EFGH$ i obwodu tego prostokąta ma wzór $f\left(x\right) = \frac{4}{9}\left(20x^3 - 351x^2 + 1458x\right)$.

Określ dziedzinę tej funkcji.

Zadanie 6.2 (0–4)

Korzystając ze wzoru $f\left(x\right)=\frac{4}{9}\left(20x^3-351x^2+1458x\right)$**, gdzie** f **oznacza funkcję iloczynu pola prostokąta** $EFGH$ **i obwodu tego prostokąta, wyznacz wymiary tego z prostokątów** $EFGH$**, dla którego iloczyn pola prostokąta i jego obwodu jest największy.**

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż równanie $2\cos^3 x+3\sin^2 x=2$**.**
Zapisz obliczenia.

Zadanie 8. (0–5)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB|=16$, $|BC|=26$ i $|\measuredangle BAC|=60^\circ$.

Wykaż, że jeśli R **jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, a** r **promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, to** $R=2{,}6r$.

Zadanie 9.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $A(-4,\ -2)$, $B(4,\ -8)$ i $C(8,\ 14)$.

Zadanie 9.1 (0–3)

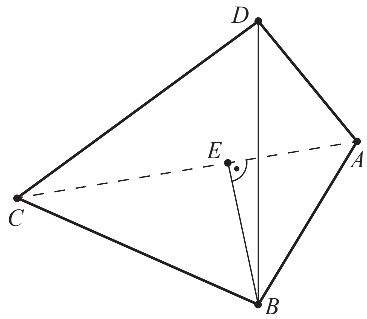
Wyznacz cosinus najmniejszego z kątów trójkąta ABC**.**

Zadanie 9.2 (0–3)

Dwusieczna kąta BAC w trójkącie ABC przecina bok BC w punkcie P.
Wyznacz współrzędne punktu P**.**

Zadanie 10. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny ABC $\left(|AC|=|BC|\right)$. Ściana boczna ABD ostrosłupa tworzy z podstawą kąt 60°. Spodkiem wysokości ostrosłupa $ABCD$ jest punkt przecięcia się wysokości podstawy tego ostrosłupa. Wysokość BE trójkąta ABC jest równa 32, zaś odcinek AE ma długość 24.



Wyznacz objętość ostrosłupa $ABCD$**.**
Zapisz obliczenia.

Zadanie 11. (0–4)

Ania ma sześcienną symetryczną kostkę. Na trzech ściankach tej kostki znajduje się litera M, na dwóch – litera A, zaś na jednej litera T. Ania wykonuje tą kostką dwa doświadczenia. Najpierw rzuca kostką cztery razy, zapisując kolejno otrzymamy litery, jedna za drugą. Interesuje ją zdarzenie A – polegające na uzyskaniu w ten sposób słowa MAMA lub słowa TATA. Następnie rzuca 7 razy kostką i sprawdza, czy zaszło zdarzenie B – dokładnie 5 razy wypadła litera A.

Czy prawdopodobieństwo zdarzenia A **jest większe od prawdopodobieństwa zdarzenia** B**?**
Odpowiedź uzasadnij zapisując obliczenia.