OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Próbny egzamin maturalny

MATEMATYKA. Poziom podstawowy

Luty 2023

Rozwiązania i propozycje schematów punktowania

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

1	2	3	4	7	8	9	10.2	10.3
A	C	C	AD	B	A	C	FF	B

11	12.2.	13.1	13.2	14.1	14.2	15	16	17	18
1-C, 2-E	B	B	A	D	FP	PF	C	1-C, 2-E	A

19	21	24.1	24.2	24.3	25	26
C	B	C	C	B	A	C

ROZWIĄZANIA I ZASADY OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5.

Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej k liczba $k^3 - k$ jest podzielna przez 6.

Przykładowe rozwiązanie:

$k^3 - k = k \cdot \left(k^2 - 1\right) = k \cdot \left(k + 1\right) \cdot \left(k - 1\right) = \left(k - 1\right) \cdot k \cdot \left(k + 1\right)$

Liczba $\left(k - 1\right) \cdot k \cdot \left(k + 1\right)$ jest iloczynem trzech kolejnych liczb naturalnych.
Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny przez 2, bo wśród nich jest przynajmniej jedna liczba parzysta. Iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest też podzielny przez 3, bo wśród nich jest dokładnie jedna liczba podzielna przez 3. Wobec tego iloczyn trzech kolejnych liczb naturalnych jest podzielny również przez $2 \cdot 3$, czyli przez 6, co należało udowodnić.

Zasady oceniania:

2 pkt – wykazanie, że liczba $k^3 - k$ jest podzielna przez 6.

1 pkt – zapisanie liczby $k^3 - k$ w postaci iloczynu i wykazanie, że jest on podzielny przez 2 lub przez 3.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 6.

Rozwiąż równanie $4x - 2x^3 = 28 - 14x^2$. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

$$4x - 2x^3 = 28 - 14x^2 \Leftrightarrow -2x^3 + 14x^2 + 4x - 28 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 14x^2 - 4x + 28 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2\left(x - 7\right) - 4\left(x - 7\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x - 7\right)\left(2x^2 - 4\right) = 0 \Leftrightarrow 2\left(x - 7\right)\left(x^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(x - 7\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$$

Rozwiązaniem równania są liczby: $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 7.

Zasady ocenienia:

3 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania równania i poddanie wszystkich rozwiązań równania: $x = -\sqrt{2}$ lub $x = \sqrt{2}$ lub $x = 7$.

2 pkt – przekształcenie równania do postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego: $2\left(x - 7\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$ albo $2\left(x - 7\right)\left(x^2 - 2\right) = 0$.

1 pkt – przekształcenie równania do postaci: $2x^2\left(x-7\right)-4\left(x-7\right)=0$

lub $2x\left(2-x^2\right)=14\left(2-x^2\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawna metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 10.1.

Odp. $\left[-2, 4\right]$

Zadanie 12.1.

Oblicz wartość współczynnika *a* oraz wartość współczynnika *b*. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

$M\left(5\right)=150-12\cdot 5=90$

zatem po 5 dniach na placu pozostanie 90 ton węgla.

Zapisujemy układ równań opisujących ilość pozostałego węgla od piątego do dwudziestego dnia

$$\begin{cases} 5a+b=90 \\ 20a+b=0 \end{cases}$$

Rozwiązaniem układu jest: $\begin{cases} a=-6 \\ b=120 \end{cases}$

Zasady ocenienia:

2 pkt − poprawne obliczenie współczynników a oraz b: $a=-6$ oraz $b=120$.

1 pkt – zapisanie równań prowadzących do obliczenia wartości współczynników a oraz b:

$5a+b=90$ oraz $20a+b=0$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawna metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 20.

Dany jest równoległobok $ABCD$, w którym $|AB|=15$, $|BC|=8$, $|\sphericalangle BAD|=30°$.

Oblicz pole tego równoległoboku oraz długości jego przekątnych. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.

$P=8\cdot 15\cdot \sin 30°=60$.

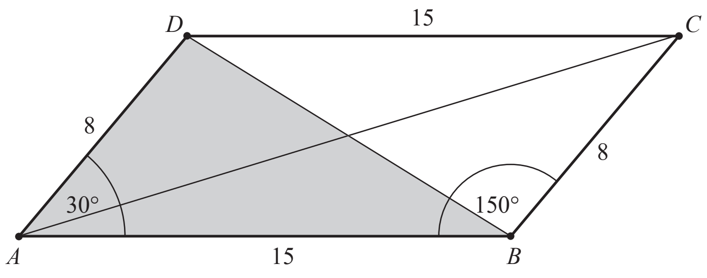
Kąt ABC ma miarę 150°.

Zastosujemy twierdzenie cosinusów dla trójkątów BAD i ABC.

Mamy zatem

$|BD|=\sqrt{289-120\sqrt{3}}$

i $|AC|=\sqrt{289+120\sqrt{3}}$



Zasady oceniania:

3 pkt − obliczenie długości przekątnej BD: $|AC| = \sqrt{289 + 120\sqrt{3}}$.

2 pkt – obliczenie długości przekątnej BD: $|BD| = \sqrt{289 - 120\sqrt{3}}$.

1 pkt – obliczenie pola równoległoboku: $P = 60$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawna metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 22.

Firma produkująca wyroby kosmetyczne pakuje je w pudełka, na których zamieszcza informacje z reklamą swoich produktów. W tym celu z drutu o długości 360 cm tworzy szkielet prostopadłościennego pudełka o kwadratowej podstawie, tak by pole powierzchni całkowitej było jak największe.

Jakie wymiary powinno mieć to pudełko, aby jego pole powierzchni całkowitej było największe? Oblicz to największe pole całkowite. Wynik podaj w m².

Przykładowe rozwiązanie:

Niech x – długość krawędzi podstawy, gdzie: $0 < x < 45$.

Pole powierzchni całkowitej jest funkcją $P(x) = -6x^2 + 360x$, $D = (0, 45)$.

Pole jest największe dla $x = 30$, bo wykresem funkcji P jest fragment paraboli o ramionach skierowanych w dół. Odcięta wierzchołka wyznacza wartość największą funkcji P.

$P(30) = 5400\,\mathrm{cm}^2 = 0,54\,\mathrm{m}^2$

Zasady oceniania:

4 pkt – uzasadnienie, że dla $x = 30$ pole całkowite jest największe i obliczenie tego pola: $P = 0,54\,\mathrm{m}^2$.

3 pkt – obliczenie wartości $x = 30$, dla której funkcja P przyjmuje wartość największą.

2 pkt – zapisanie dziedziny funkcji P: $D = (0,45)$.

1 pkt – zapisanie poprawnego wzoru funkcji P pola powierzchni całkowitej: $P(x) = 2x^2 + 4x(90 - 2x)$, czyli $P(x) = -6x^2 + 360x$.

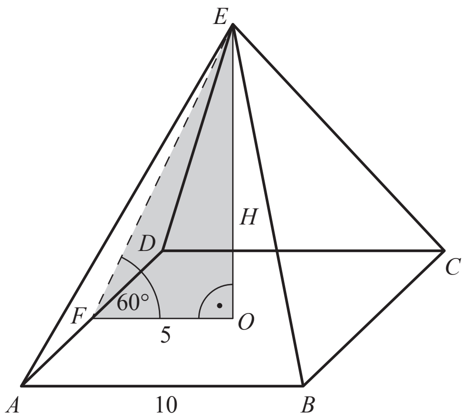
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawna metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 23.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy jest równy 60°, a przekątna podstawy ostrosłupa ma długość $10\sqrt{2}$.

Oblicz objętość tego ostrosłupa. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Punkt O jest spodkiem wysokości ostrosłupa, F jest środkiem odcinka AD.

Przekątna podstawy ma długość $10\sqrt{2}$, więc krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 10. Odcinek FO ma długość 5.

Z trójkąta EOF: $\mathrm{tg}60^\circ = \frac{H}{5}$, czyli $\frac{H}{5} = \sqrt{3}$, stąd $H = 5\sqrt{3}$.

Podstawiając do wzoru na objętość ostrosłupa otrzymujemy:

$$V = \frac{1}{3}10^2 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{500\sqrt{3}}{3}.$$

Zasady ocenienia:

3 pkt – obliczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{500\sqrt{3}}{3}$.

2 pkt – obliczenie wysokości ostrosłupa: $H = 5\sqrt{3}$.

1 pkt – obliczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa: $a = 10$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawna metodę albo brak rozwiązania.