OFICYNA EDUKACYJNA
KRZYSZTOF PAZDRO

Próbny egzamin maturalny

MATEMATYKA. Poziom rozszerzony

Luty 2023

Rozwiązania i propozycje schematów punktowania

Zadanie 1. (0–3)

Dana jest liczba $a = \log_{12} 4 \cdot \log_{12} 36 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} \sqrt{3}$.

Wykaż, że liczba a jest liczbą całkowitą.

Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

$$a = \log_{12} 4 \cdot \log_{12} 36 + \log_{12} 9 \cdot \log_{12} \sqrt{3} =$$

$$= \log_{12} 4 \cdot \left(\log_{12} 4 + \log_{12} 9\right) + 2\log_{12} 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_{12} 3 = \log_{12}{}^2 4 + 2\log_{12} 4 \cdot \log_{12} 3 + \log_{12}{}^2 3 =$$

$$= \left(\log_{12} 4 + \log_{12} 3\right)^2 = \log_{12}{}^2 12 = 1 \text{ i } 1 \in \boldsymbol{Z}.$$

Zasady oceniania:

3 pkt – przeprowadzenie pełnego uzasadnienia, że $a \in \boldsymbol{Z}$.

2 pkt – zapisanie wyrażenia a jako $\left(\log_{12} 4 + \log_{12} 3\right)^2$.

1 pkt – zapisanie wyrażenia a w zależności od $\log_{12} 4$ oraz $\log_{12} 3$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 2. (0–3)

Dana jest funkcja $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + 3\frac{8}{9}x$. Prosta k jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $A = \left(1, f(1)\right)$. Prosta m jest równoległa do prostej k, różna od prostej k i jednocześnie styczna do wykresu funkcji f w punkcie $B = \left(b, f(b)\right)$.

Wyznacz wartość b. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

Ponieważ $f'(x) = -x^2 + \frac{1}{9}x + 3\frac{8}{9}$ oraz $f'(1) = -1 + \frac{1}{9} + 3\frac{8}{9} = 3$, to współczynnik kierunkowy obu prostych m oraz k jest równy 3.

Rozwiązując równanie $f'(x) = 3$ wyznaczamy punkty styczności.

$$-x^2 + \frac{1}{9}x + 3\frac{8}{9} = 3 \Leftrightarrow -9x^2 + x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ lub } x = -\frac{8}{9}.$$

Odp. $b = -\frac{8}{9}$.

Zasady oceniania:

3 pkt – rozwiązanie równania $f'(x) = 3$ i wyznaczenie $b = -\frac{8}{9}$.

2 pkt – obliczenie $f'(1) = 3$ i stwierdzenie, że współczynnik kierunkowy prostej m jest równy 3.

1 pkt – obliczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = -x^2 + \frac{1}{9}x + 3\frac{8}{9}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 3. (0–4)

Dla pewnych liczb rzeczywistych x ciąg $(7 - x,\ x + 8,\ -2x,\ \ldots)$ jest nieskończonym ciągiem geometrycznym. Szereg geometryczny wyznaczony przez ten ciąg jest zbieżny.
Wyznacz sumę tego szeregu. Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:
Z własności ciągu geometrycznego mamy $(x+8)^2 = -2x \cdot (7 - x)$, skąd $-x^2 + 30x + 64 = 0$. Zatem
$x = -2$ lub $x = 32$.
Dla $x = -2$ iloraz ciągu jest równy $q = \frac{2}{3}$ i odpowiedni szereg geometryczny jest zbieżny; dla $x = 32$ iloraz ciągu jest równy $q = -\frac{8}{5}$ $\left(-\frac{8}{5} \notin (-1, 1)\right)$ i odpowiedni szereg geometryczny jest rozbieżny.
Jeśli $x = -2$, to suma szeregu jest równa $S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9}{1-\frac{2}{3}} = 27$.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania i poprawne wyznaczenie sumy szeregu: $S = 27$.
3 pkt – obliczenie ilorazu ciągu w obu przypadkach i odrzucenie $x = 32$.
2 pkt – poprawne rozwiązanie równania $-x^2 + 30x + 64 = 0$: $x = -2$ lub $x = 32$.
1 pkt – wykorzystanie własności ciągu geometrycznego i zapisanie równości
$$(x+8)^2 = -2x \cdot (7 - x).$$
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 4. (0–5)

Dane jest równanie $(x-2)(x^2 + mx - m + 3) = 0$ z niewiadomą x i parametrem m, $m \in \mathbb{R}$
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których to równanie ma trzy rozwiązania rzeczywiste takie, że kwadrat ich iloczynu jest większy od kwadratu ich sumy.
Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:
Równanie $(x-2)(x^2 + mx - m + 3) = 0$ jest równoważne alternatywie równań:
$x = 2$ lub $x^2 + mx - m + 3 = 0$, zatem dla równania kwadratowego muszą zachodzić warunki:
1) $\Delta > 0$
2) $2^2 + 2m - m + 3 \neq 0$
3) $(2x_1x_2)^2 > (2 + x_1 + x_2)^2$

Ad. 1) Ponieważ $\Delta = m^2 + 4m - 12 = (m-2)(m+6)$, więc $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.
Ad. 2) $m \neq -7$.
Ad. 3) Po zastosowaniu wzorów Viete'a: $\left(2(-m+3)\right)^2 > (2 - m)^2$. Otrzymujemy nierówność $3m^2 - 20m + 32 > 0$, więc $m \in \left(-\infty, 2\frac{2}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

Ostatecznie otrzymujemy: $m \in (-\infty, -7) \cup (-7, -6) \cup \left(2, 2\frac{2}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

Zasady oceniania:

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania i poprawny wynik:

$$m \in (-\infty, -7) \cup (-7, -6) \cup \left(2, 2\frac{2}{3}\right) \cup (4, +\infty).$$

4 pkt – poprawne rozwiązanie warunku

$(2x_1x_2)^2 > (2 + x_1 + x_2)^2$: $m \in \left(-\infty, 2\frac{2}{3}\right) \cup (4, +\infty)$, poprawne rozwiązanie warunku $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$ oraz poprawne rozwiązanie warunku $2^2 + 2m - m + 3 \neq 0$: $m \neq -7$.

3 pkt – poprawne wykonanie wszystkich trzech czynności wymienionych w kryteriach za 1 pkt

ALBO

poprawne rozwiązanie warunku $(2x_1x_2)^2 > (2 + x_1 + x_2)^2$:

$m \in \left(-\infty, 2\frac{2}{3}\right) \cup (4, +\infty)$ oraz poprawne wykonanie jednej z dwóch czynności:

1) rozwiązanie warunku $\Delta > 0$
2) rozwiązanie warunku $2^2 + 2m - m + 3 \neq 0$: $m \neq -7$.

2 pkt – poprawne wykonanie dwóch spośród trzech czynności wymienionych w kryteriach za 1 pkt

ALBO

poprawne rozwiązanie warunku $(2x_1x_2)^2 > (2 + x_1 + x_2)^2$:

$m \in \left(-\infty, 2\frac{2}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

1 pkt – poprawne rozwiązanie nierówności $\Delta > 0$: $m \in (-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$.

ALBO

zapisanie i rozwiązanie warunku $2^2 + 2m - m + 3 \neq 0$: $m \neq -7$.

ALBO

zastosowanie wzorów Viete'a i otrzymanie nierówności $\left(2(-m + 3)\right)^2 > (2 - m)^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 5. (0–3)

Dane są trzy kolejne dodatnie liczby naturalne.

Udowodnij, że jeśli zsumujemy sześcian najmniejszej z tych liczb, kwadrat liczby środkowej oraz największą z danych liczb naturalnych, to otrzymamy liczbę złożoną.

Przykładowe rozwiązanie:

Niech $n \in \boldsymbol{N}_+$. Wtedy

$$n^3 + (n + 1)^2 + n + 2 = n^3 + n^2 + 3n + 3 = (n + 1)(n^2 + 3) = (n + 1)(n^2 + 3).$$

Na mocy założenia liczby $n + 1$ oraz $n^2 + 3$ są liczbami naturalnymi większymi od 1. Liczba $(n + 1)(n^2 + 3)$ posiada co najmniej dwa dzielniki naturalne, więc jest złożona.

Można też zauważyć, że ponieważ $n^2 \geq n$ oraz $3 > 1$, to $n^2 + 3 > n + 1$. Zatem liczba $(n+1)(n^2+3)$ jest iloczynem dwóch różnych liczb naturalnych większych od 1, czyli jest złożona.

Zasady oceniania:

3 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu, tj. zapisanie sumy w postaci $(n+1)(n^2+3)$ oraz uzasadnienie, że jest to liczba złożona.

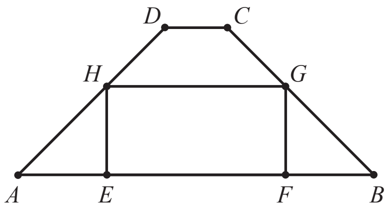
2 pkt – zapisanie sumy w postaci $(n+1)(n^2+3)$.

1 pkt – zapisanie badanej sumy jako $n^3 + (n+1)^2 + n + 2$ z założeniami $n \in \boldsymbol{N}_+$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 6.

Dany jest trapez równoramienny $ABCD$, w którym $|AB| = 18$, $|BC| = |AD| = 10$ i $|CD| = 2$. W ten trapez wpisano prostokąt $EFGH$ jak na rysunku (bok EF zawiera się w boku AB trapezu, zaś wierzchołki G i H leżą na ramionach trapezu). Niech x oznacza długość boku HE.



Zadanie 6.1 (0–4)

Wykaż, że funkcja f opisująca iloczyn pola prostokąta $EFGH$ i obwodu tego prostokąta ma wzór $f(x) = \frac{4}{9}(20x^3 - 351x^2 + 1458x)$.

Określ dziedzinę tej funkcji.

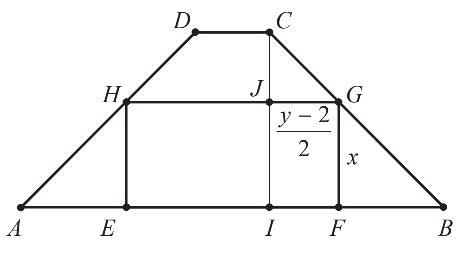
Zadanie 6.2 (0–4)

Korzystając ze wzoru $f(x) = \frac{4}{9}(20x^3 - 351x^2 + 1458x)$, gdzie f oznacza funkcję iloczynu pola prostokąta $EFGH$ i obwodu tego prostokąta, wyznacz wymiary tego z prostokątów $EFGH$, dla którego iloczyn pola prostokąta i jego obwodu jest największy.

Przykładowe rozwiązanie zadania 6.1:

Niech $|HG| = y$. Odcinek CI jest wysokością trapezu i przecina bok HG w punkcie J. Wtedy $|JG| = \frac{y-2}{2}$.

Ponieważ $|BI| = \frac{18-2}{2} = 8$, więc z tw. Pitagorasa dla trójkąta CIB mamy $|CI| = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.



Z podobieństwa trójkątów CJG oraz CIB mamy $\frac{|JG|}{|IB|} = \frac{|CJ|}{|CI|}$, czyli $\frac{\frac{y-2}{2}}{8} = \frac{6-x}{6}$. Po przekształceniach otrzymujemy $y = 18 - \frac{8}{3}x$.

Iloczyn pola prostokąta $EFGH$ i jego obwodu wyraża się wzorem: $x \cdot y \cdot 2 \cdot (x+y)$, więc

$$f(x) = 2x \cdot \left(18 - \frac{8}{3}x\right) \cdot \left(18 - \frac{5}{3}x\right) = \frac{2}{9}x(54 - 8x)(54 - 5x) =$$

$$= \frac{4}{9}\left(20x^3 - 351x^2 + 1458x\right).$$

Oczywiście $x > 0$ i $x < 6$, czyli $D_f = (0; 6)$.

Przykładowe rozwiązanie zadania 6.2:

$$f'(x) = \frac{4}{9}\left(60x^2 - 702x + 1458\right) = \frac{4}{9} \cdot 60(x - 2{,}7)(x - 9),\ D_f = D_{f'}$$

Zatem $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2{,}7,$ bo $9 \notin D_{f'}$.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0;\ 2{,}7)$ oraz $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2{,}7;\ 6)$.

x	$(0;\ 2{,}7)$	$2{,}7$	$(2{,}7;\ 6)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	maksimum lokalne	↘

Maksimum lokalne funkcji *f* jest wartością największą.
Odp. Szukany prostokąt ma wymiary 2,7 × 10,8.

Zasady oceniania zad. 6.1:

4 pkt – poprawne uzasadnienie, że $f(x) = \frac{4}{9}\left(20x^3 - 351x^2 + 1458x\right)$ oraz poprawne ustalenie dziedziny $D_f = (0; 6)$.

3 pkt – poprawne uzasadnienie, że $f(x) = \frac{4}{9}\left(20x^3 - 351x^2 + 1458x\right)$

ALBO

obliczenie wysokości trapezu $|CI| = 6$, wykorzystanie podobieństwa trójkątów i wyznaczenie zależności $y = 18 - \frac{8}{3}x$ oraz poprawne ustalenie dziedziny $D_f = (0; 6)$.

2 pkt – obliczenie wysokości trapezu $|CI| = 6$ oraz poprawne ustalenie dziedziny $D_f = (0; 6)$

ALBO

obliczenie wysokości trapezu $|CI| = 6$ oraz wykorzystanie podobieństwa trójkątów i wyznaczenie zależności $y = 18 - \frac{8}{3}x$.

1 pkt – obliczenie wysokości trapezu $|CI| = 6$

ALBO

poprawne ustalenie dziedziny $D_f = (0; 6)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania zad. 6.2:

4 pkt – wyznaczenie wymiarów prostokąta, dla którego iloczyn jego pola i obwodu jest największy: $2{,}7 \times 10{,}8$.

3 pkt – zbadanie znaku pochodnej i uzasadnienie, że dla $x = 2{,}7$ funkcja przyjmuje wartość największą.

2 pkt – wyznaczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji f : $x = 2{,}7$.

1 pkt – wyznaczenie pochodnej funkcji f : $f'(x) = \frac{4}{9}\left(60x^2 - 702x + 1458\right)$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 7. (0–4)

Rozwiąż równanie $2\cos^3 x + 3\sin^2 x = 2$**.**
Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:
Przekształcamy równoważnie

$2\cos^3 x + 3\sin^2 x = 2$

$2\cos^3 x + 3\left(1 - \cos^2 x\right) = 2$

Niech $\cos x = t$

$2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 2t^2 - \left(t^2 - 1\right) = 0 \Leftrightarrow 2t^2\left(t - 1\right) - \left(t - 1\right)\left(t + 1\right) = 0$

$\left(t - 1\right)\left(2t^2 - t - 1\right) = 0$

$t = 1$ lub $t = -\frac{1}{2}$

stąd

$\cos x = 1$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$

zatem

$x = 2k\pi$ lub $x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ lub $x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda rozwiązania równania i poprawny wynik:

$$x = 2k\pi \text{ lub } x = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \text{ lub } x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in \boldsymbol{Z}.$$

3 pkt – rozwiązanie jednego z dwóch równań $\cos x = 1$ lub $\cos x = -\frac{1}{2}$.

2 pkt – sprowadzenie równania trygonometrycznego do równania wielomianowego i wyznaczenie rozwiązań tego równania: $t = 1$ lub $t = -\frac{1}{2}$.

1 pkt – przekształcenie równania do postaci, w której występuje jedna funkcja trygonometryczna, np. $\cos x$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 8. (0–5)

Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AB| = 16$, $|BC| = 26$ i $|\measuredangle BAC| = 60^\circ$.

Wykaż, że jeśli R jest promieniem okręgu opisanego na tym trójkącie, a r promieniem okręgu wpisanego w ten trójkąt, to $R = 2,6r$.

Przykładowe rozwiązanie:
Niech x oznacza długość boku AC. Z tw. cosinusów mamy:
$26^2 = x^2 + 16^2 - 2x \cdot 16 \cdot \cos 60^\circ$, czyli $x^2 - 16x - 420 = 0$,
stąd
$x = 30$ lub $x = -14$ $\left(\text{sprzeczność, bo } x \text{ jest długością, więc } x > 0\right)$.

Obliczamy pole trójkąta ABC na dwa sposoby mamy $P = \dfrac{1}{2} \cdot 16 \cdot 30 \cdot \sin 60^\circ = 120\sqrt{3}$ oraz

$P = \dfrac{16 + 26 + 30}{2} \cdot r = 36r$. Zatem $36r = 120\sqrt{3}$, skąd $r = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

Z tw. sinusów mamy: $\dfrac{|BC|}{\sin 60^\circ} = 2R$, co daje $R = \dfrac{26\sqrt{3}}{3}$.

Ostatecznie $\dfrac{R}{r} = \dfrac{26}{10}$, czyli $R = 2,6r$.

Zasady oceniania:

5 pkt – przeprowadzenie pełnego dowodu, że $R = 2,6r$.

4 pkt – wyznaczenie promienia okręgu opisanego na trójkącie: $R = \dfrac{26\sqrt{3}}{3}$ oraz wyznaczenie promienia okręgu wpisanego w trójkąt: $r = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

3 pkt – wyznaczenie promienia okręgu opisanego: $R = \dfrac{26\sqrt{3}}{3}$

ALBO

wyznaczenie promienia okręgu wpisanego: $r = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.

2 pkt – wyznaczenie długości boku AC : $x = 30$.
1 pkt – zastosowanie tw. cosinusów do obliczenia $|AC|$.
0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 9.

Dany jest trójkąt ABC, w którym $A(-4, -2)$, $B(4, -8)$ i $C(8, 14)$.

Zadanie 9.1 (0–3)

Wyznacz cosinus najmniejszego z kątów trójkąta ABC.

Zadanie 9.2 (0–3)

Dwusieczna kąta BAC w trójkącie ABC przecina bok BC w punkcie P.
Wyznacz współrzędne punktu P.

Przykładowe rozwiązanie:

Zad. 9.1.

Obliczamy długości boków $|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, $|AC| = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$, oraz $|BC| = \sqrt{4^2 + 22^2} = 10\sqrt{5}$.

Ponieważ $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, więc z twierdzenia odwrotnego do tw. Pitagorasa trójkąt ABC jest prostokątny, zatem najmniejszym kątem jest kąt przy wierzchołku C.

$$\cos(\measuredangle ACB) = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Zad. 9.2.

Z twierdzenia o dwusiecznej $\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{2}$, zatem $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. Jeśli $P(x_p, y_p)$, to możemy zapisać

$\left[x_p - 4, y_p + 8\right] = \frac{1}{3}[4, 22]$, skąd $x_p = 5\frac{1}{3}$ i $y_p = -\frac{2}{3}$. Zatem $P\left(5\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Zasady oceniania zad. 9.1:

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania i poprawny wynik: $\cos(\measuredangle ACB) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

2 pkt – poprawne obliczenie długości boków $|AB|$, $|AC|$ i $|BC|$ oraz uzasadnienie, że trójkąt jest prostokątny.

1 pkt – poprawne obliczenie długości dwóch boków trójkąta ABC.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zasady oceniania zad. 9.2:

3 pkt – poprawna metoda rozwiązania i poprawny wynik: $P\left(5\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

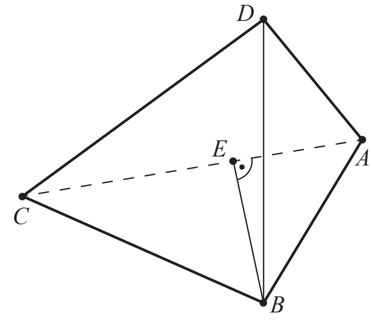
2 pkt – zapisanie zależności pozwalającej wyznaczyć współrzędne punktu P:
$\left[x_p - 4, y_p + 8\right] = \frac{1}{3}[4, 22]$.

1 pkt – zastosowanie twierdzenia o dwusiecznej i otrzymanie zależności $\frac{|BP|}{|CP|} = \frac{1}{2}$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 10. (0–5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD$ jest trójkąt równoramienny ABC $(|AC| = |BC|)$. Ściana boczna ABD ostrosłupa tworzy z podstawą kąt 60°. Spodkiem wysokości ostrosłupa $ABCD$ jest punkt przecięcia się wysokości podstawy tego ostrosłupa. Wysokość BE trójkąta ABC jest równa 32, zaś odcinek AE ma długość 24.

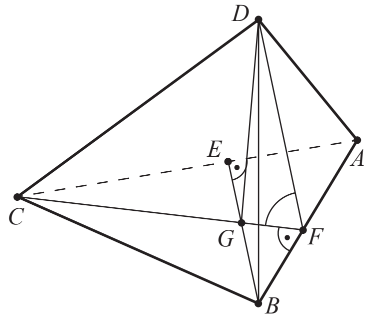


Wyznacz objętość ostrosłupa $ABCD$**.**
Zapisz obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

W trójkącie ABE spełniony jest warunek $|BE| > |EA|$, więc miara kąta BAC jest większa od 45°. Oznacza to, że trójkąt ABC jest ostrokątny, a wysokości przecinają się wewnątrz trójkąta ABC. W trójkącie prostokątnym ABE mamy:

$|AB| = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40.$



Niech CF będzie wysokością podstawy. Wtedy $|BF| = |FA| = 20.$

Ponadto niech punkt G będzie punktem wspólnym wysokości poprowadzonej do boku AB, czyli także spodkiem wysokości ostrosłupa.

Trójkąty prostokątne AFC oraz ABE są podobne (cecha *kkk*).

Zatem $\frac{|CF|}{|AF|} = \frac{|BE|}{|AE|}$, stąd $|CF| = 20 \cdot \frac{32}{24} = \frac{80}{3}$

Trójkąty prostokątne BFG oraz ABE są podobne (cecha *kkk*). Zatem $\frac{|GF|}{|BF|} = \frac{|AE|}{|BE|}$, stąd

$|GF| = 20 \cdot \frac{24}{32} = 15$

Z trójkąta prostokątnego DGF dostajemy $\frac{|DG|}{|GF|} = \operatorname{tg} 60°$, czyli $|DG| = 15\sqrt{3}$.

Objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |CF| \cdot |DG| = \frac{1}{6} \cdot 40 \cdot \frac{80}{3} \cdot 15\sqrt{3} = \frac{8000\sqrt{3}}{3}$.

Zasady oceniania:

5 pkt – zastosowanie poprawnej metody rozwiązania i wyznaczenie objętości ostrosłupa $V = \frac{8000\sqrt{3}}{3}$.

4 pkt – poprawne obliczenie długości odcinka CF: $|CF| = \frac{80}{3}$, poprawne obliczenie długości odcinka GF: $|GF| = 15$ oraz poprawne obliczenie wysokości ostrosłupa: $|DG| = 15\sqrt{3}$.

3 pkt – poprawne obliczenie długości odcinka CF: $|CF| = \frac{80}{3}$ oraz poprawne obliczenie długości odcinka GF: $|GF| = 15$

ALBO

poprawne obliczenie długości odcinka GF: $|GF| = 15$ oraz poprawne obliczenie wysokości ostrosłupa: $|DG| = 15\sqrt{3}$.

2 pkt – poprawne obliczenie długości odcinka CF: $|CF| = \frac{80}{3}$

ALBO

poprawne obliczenie długości odcinka GF: $|GF| = 15$.

1 pkt – poprawne obliczenie długości krawędzi AB: $|AB| = 40$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.

Zadanie 11. (0–4)

Ania ma sześcienną symetryczną kostkę. Na trzech ściankach tej kostki znajduje się litera M, na dwóch – litera A, zaś na jednej litera T. Ania wykonuje tą kostką dwa doświadczenia. Najpierw rzuca kostką cztery razy, zapisując kolejno otrzymamy litery, jedna za drugą. Interesuje ją zdarzenie A – polegające na uzyskaniu w ten sposób słowa MAMA lub słowa TATA. Następnie rzuca 7 razy kostką i sprawdza, czy zaszło zdarzenie B – dokładnie 5 razy wypadła litera A.

Czy prawdopodobieństwo zdarzenia A jest większe od prawdopodobieństwa zdarzenia B? Odpowiedź uzasadnij zapisując obliczenia.

Przykładowe rozwiązanie:

$$P(A)=\frac{3\cdot 2\cdot 3\cdot 2+1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{6^4}=\frac{40}{1296}=\frac{5}{162}=\frac{45}{1458}$$

Drugie doświadczenie to ciąg siedmiu niezależnych prób Bernoullego. W próbie (rzucie kostką) sukcesem jest wypadnięcie litery A. Prawdopodobieństwo sukcesu jest równe $\frac{1}{3}$. Zatem

$$P(B)=\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{21\cdot 4}{3^7}=\frac{28}{729}=\frac{56}{1458}$$

$P(A)<P(B)$, czyli prawdopodobieństwa zdarzenia A nie jest większe od prawdopodobieństwa zdarzenia B.

Zasady oceniania:

4 pkt – poprawna metoda obliczenia prawdopodobieństw oraz ich porównanie:
$P(A)<P(B)$.

3 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństw zdarzeń A i B: $P(A)=\frac{5}{162}$, $P(B)=\frac{28}{729}$.

2 pkt – poprawne obliczenie prawdopodobieństwa $P(A)=\frac{5}{162}$

ALBO

poprawne obliczenie prawdopodobieństwa $P(B)=\frac{28}{729}$.

1 pkt – obliczenie $|\Omega|=6^4$ lub $|A|=40$ w pierwszym doświadczeniu

ALBO

zauważenie, że drugie doświadczenie to ciąg siedmiu niezależnych prób Bernoullego oraz wykorzystanie schematu Bernoullego dla obliczenia $P(B)=\binom{7}{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

0 pkt – rozwiązanie, w którym zastosowano niepoprawną metodę albo brak rozwiązania.